

ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ДИНАМИКИ ЛЕСНОЙ РАСТИТЕЛЬНОСТИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Г.П. БЫСТРАЙ,

кандидат физико-математических наук, профессор,
Уральский государственный университет им. А.М. Горького

Н.С. ИВАНОВА,

кандидат сельскохозяйственных наук, старший научный сотрудник, Ботанический сад УрО РАН

Ключевые слова: математическое моделирование, теория катастроф, восстановительно-возрастная динамика, смена древесных видов, травяно-кустарничковый ярус, мощность почв.

Проблема динамики лесной растительности широко обсуждается в литературе [1, 2]. Накоплен огромный фактический материал по особенностям динамики древесных видов для разных континентов, климатических зон и лесорастительных условий. Однако анализ этого экспериментального материала из-за многообразия и сложности лесных экосистем и множества факторов, влияющих на их динамику, затруднен. Необходима формализация знаний об объекте. Особое значение в связи с этим приобретает математическое моделирование. Особенно важно оно для выявления причин наблюдаемых в лесах смен и оценки устойчивости развития. В формировании лесов в большинстве случаев участвует несколько древесных видов. Выявлено, что их доли в составе формирующихся лесов не остаются постоянными и часто изменяются резко, скачком (проявляя дискретность) при плавном непрерывном изменении абиотических факторов [1]. Такие явления описываются моделями теории катастроф Р. Тома [2]. Попытки применения теории катастроф для качественного моделирования лесной растительности имели место [1, 3]. Наибольшее количество работ посвящено качественному анализу динамики растительности на экотоне (переходной полосе между двумя альтернативными подсистемами – метастабильной зоне) [1, 4] и поиску предельных (критических) значений внешних и внутренних факторов [5]. Однако последовательный подход, связанный с количественным описанием, отсутствовал.

Цель исследований

На примере построения обобщенной математической модели формирования лесной растительности на вырубках показать возможности подходов теории катастроф для описания динамики лесов.

Работа выполнена по Программе Президиума РАН «Биологическое разнообразие» и гранта РФФИ 09-02-00561а «Безопасность критических инфраструктур и их влияние на развитие хозяйственного комплекса территории».

1. Математическая модель

В качестве примера применения теории катастроф для описания динамики лесной растительности построим обобщенную модель формирования лесной растительности на сплошных вырубках. После сплошных рубок возможно несколько альтернативных линий развития растительности. Из всего разнообразия возможных вариантов смен древесных видов рассмотрим только взаимоотношения берёзы (*Betula pendula* Roth. и *B. pubescens* Ehrh.) и сосны (*Pinus sylvestris* L.) – наиболее распространённых на Урале и в Зауралье древесных видов – в процессе зарастания вырубок и формирования нового древостоя. В качестве базовых объектов выберем сплошные вырубки, расположенные на территории южно-таёжного округа Зауральской холмисто-предгорной провинции.

Управляющие параметры. При достаточном обсеменении вырубок наиболее значимыми факторами, определяющими направление лесовосстановительных процессов в рассматриваемом районе, являются лесорастительные условия и интенсивность развития травяного покрова (главного конкурента древесной растительности в первые годы жизни). Эти факторы являются управляющими параметрами в обсуждаемой модели.

T – безразмерная характеристика интенсивности развития травянистого яруса:

$$T = (\rho_0 - \rho_m) : \rho_0,$$

где $\rho_0 = (\rho_s + \rho_b) : 2$ – средняя

суммарная масса (плотность) сосны (*Pinus sylvestris*) и берёзы (*Betula pendula* и *B. pubescens*);

ρ_m – масса трав (плотность);

ρ – характеристика, описывающая ин-

тенсивность возобновления древесной растительности: плотность (масса) подраста сосны (*Pinus sylvestris*) и подрост берёзы (*Betula pendula* и *B. pubescens*).



620134, г. Екатеринбург,
ул. Билимбаевская, д. 32а;
тел. 8-9028712327;
e-mail: i.n.s@bk.ru

Чем больше масса трав, тем меньше T .

Управляющий параметр H – характеристика богатства лесорастительных условий (мощность почвы, см). Мощность почвы – комплексный фактор, характеризующий запас в почве элементов минерального питания и влаги и широко используемый в лесной типологии [6].

Математическая модель. Рассмотрим следующую модель формирования лесной растительности на сплошных вырубках в зависимости от двух управляющих параметров (интенсивности развития травянистого яруса и мощности почв): структура T (безразмерная характеристика равномерно распределённого травянистого яруса), объединяясь с двумя величинами (характеристика, описывающая древесную растительность: сосна + берёза), приводит к образованию трёх величин. В то же время величины и T влияют на почвообразовательный процесс H . В свою очередь, H влияет на формирование древесного () и травянистого яруса (T). Данные процессы протекают как в прямом, так и в обратном направлении. Это формализуется следующей схемой протекания процессов:

$$T + 2\rho \leftrightarrow 3\rho(k_2, k_3)$$

$$\rho \leftrightarrow H(k_1, k_4)$$

$$T \leftrightarrow H$$

В скобках указаны константы скоростей прямых и обратных процессов. Это приводит к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\rho}{dt} = -k_1|\rho + k_2T|\rho^2 - |k_3|\rho^3 + k_4|H|, \quad (1)$$

где k_i – некоторые другие параметры экосистемы, которые следует определить [7].

Эта модель описывает степень угнетения формирующейся древесной растительности травянистым ярусом и влияние лесорастительных условий

Mathematical modeling, catastrophe theory, forest restoration, change of tree species, herb layer, edaphic factor.

Лесное хозяйство

на темпы роста древесных растений. Чем меньше T , тем сильнее древесная растительность угнетается травами. Чем больше T (меньше фитомасса трав), тем больше появляется и вы-

живает всходов древесных видов, интенсивнее их рост, соответственно, плотность древесных видов растет быстрее. Увеличение H (мощности почв) приводит к угнетению сосны в большей степени, чем берёзы.

Для перехода к канонической (безразмерной) форме умножим левую и правую части уравнения (1) на

где ρ_c – некоторый масштаб плотности: плотность древесной растительности в критической точке, в которой плотность сосны и берёзы равны (смешанный древостой). В результате получаем из (1) безразмерное уравнение:

$$\frac{d\rho^*}{dt} = \left[\rho^{*3} - \frac{|k_2|}{|k_3|\rho_c} T \rho^{*2} + \frac{|k_1|}{|k_3|\rho_c^2} \rho^* - H^* \right] \quad (2)$$

Принимая во внимание, что в критической точке экосистемы $\rho = \rho_0 = \rho_c$ ($\rho^* = 1, \rho_0^* = 1$), $H^* = 1$ неопределённые константы уравнения (2) могут быть выражены через масштабные величины t_0 и ρ_c : $|k_1| = 3 : t_0$, $|k_2| = 3 : t_0 \rho_c$, $|k_3| = 1 : t_0 \rho_c^2$.

Тогда $|k_4| = \rho_c : H : t_0$. Здесь $t = t : t_0$, $\rho^* = \rho : \rho_c$, $t_0 = 1 : |k_3| \rho_c^2$, $H^* = H : H_c$.

Формулы перехода от кубического уравнения $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ к кубическому уравнению $\eta^3 + a^* \eta + b^* = 0$ следующие:

$$x = \eta - \alpha : 3, \quad a^* = -\alpha^2 : 3 + \beta, \quad b^* = \alpha(\alpha : 3)^3 - \alpha\beta : 3 + \gamma.$$

В результате уравнение (2) может быть записано в канонической форме, то есть без квадратичного члена [8]:

$$\frac{d\eta}{dt} = -(\eta^3 + a^* \eta + b^*), \quad \text{или} \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial \eta}, \quad (3)$$

где $F^* = F : F^0$ – потенциальная функция катастрофы сборки, которая определяет энергетическую характеристику в приведённом виде [7]:

$$F^*(\eta, a^*, b^*) = \frac{1}{4} \eta^4 + \frac{1}{2} a^* \eta^2 + b^* \eta,$$

$$\eta = \rho^* - T \rho_0^* \quad (4)$$

Здесь $\eta = \rho : \rho_c - T \rho_0 : \rho_c$ – параметр порядка, характеризующий отклонение плотности растительности (древесной и травянистой) при фиксированной величине T , близкой к единице, от некоторого среднего значения плотности сосны и берёзы $\rho_0 = (\rho_s + \rho_b) : 2$, где ρ_c – плотность в критической точке; константы a^* , b^* – параметры; $\rho_0^* = |k_2| : 3 |k_3| \rho_c$.

Таким образом, сделан переход к новой переменной η и управляющим параметрам a^* и b^* :

$$a^* = -3(T^2 \rho_0^{*2} - 1),$$

$$b^* = -H^* + 3T \rho_0^* - 2T^3 \rho_0^{*3}, \quad (5)$$

где ρ_0 представляет собой среднюю плотность сосны и берёзы.

Параметр $b^* = -H^* + H_s^*$ можно представить как сумму внешнего поля и собственного самосогласованного $H_s^* = 3T \rho_0^* - 2T^3 \rho_0^{*3}$. При $b^* = 0$, $H^* = H_s^*$.

Равновесное уравнение состояния возникает из (3) после приравнивания правой части нулю:

$$\eta^3 + a^* \eta + b^* = 0 \quad (6)$$

Полученная модель соответствует так называемой катастрофе сборки [8].

Условия равновесия. Равновесию древесной и травянистой раститель-

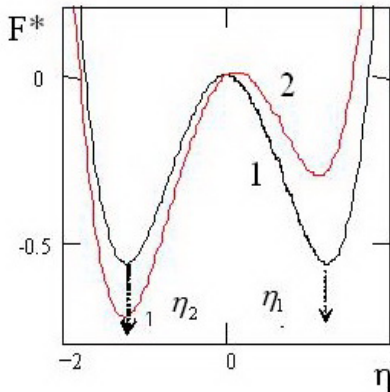


Рисунок 1. Потенциальная функция для уравнения состояния формирующейся на вырубке лесной растительности: 1 – при равновесии; 2 – метастабильное состояние одного из видов (сосны или берёзы)

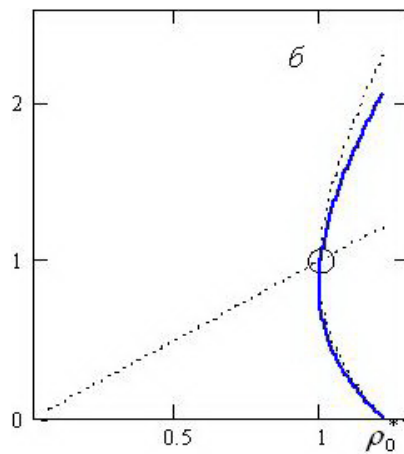
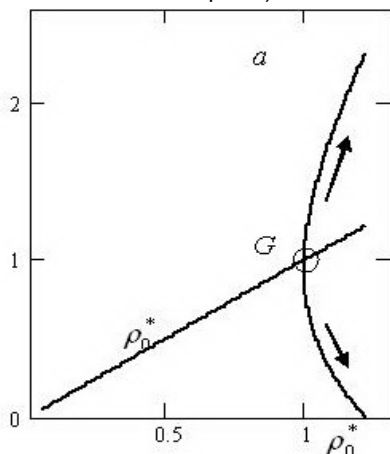


Рисунок 2. Бифуркационные кривые системы берёза – сосна – трава: а – $T=0.95$; б – $T=0.356$; в критической точке G плотности берёзы и сосны равны; изменением H^* можно скачком изменить соотношение берёзы и сосны (фазовый переход I рода); при прохождении критической точки имеем случай фазового перехода II рода; верхняя ветвь – вид с большей плотностью (сосна или берёза), нижняя – вид с меньшей плотностью

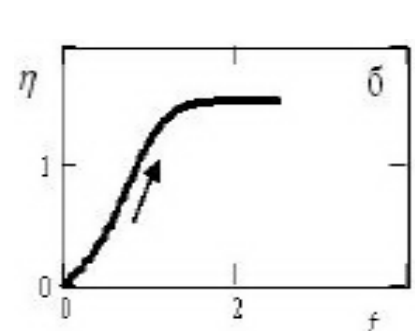
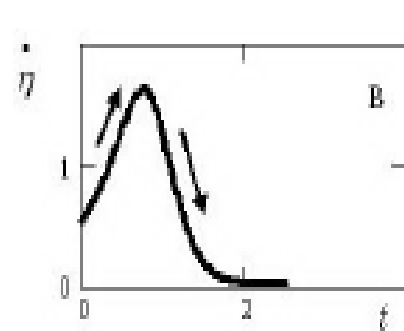
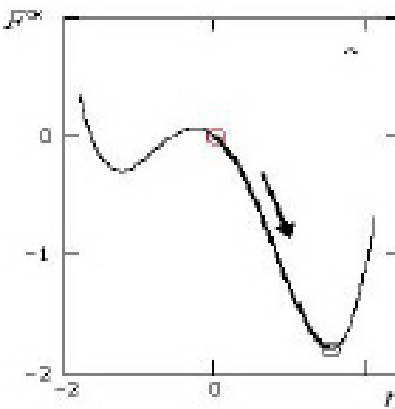


Рисунок 3. Травянистый ярус развит слабо: а – потенциальная функция; б – изменение параметра порядка; в – скорость роста древесной растительности; $T = (\rho_0 - \rho_m) : \rho_0 = 0,99$;

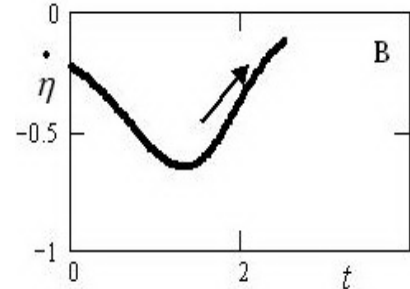
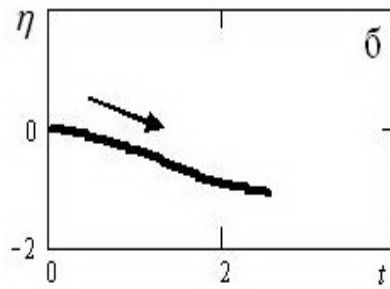
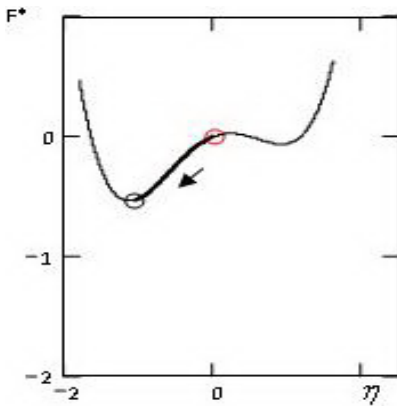


Рисунок 4. Травянистый ярус развит сильно; переход к новой точке равновесия: а – потенциальная функция; б – изменение параметра порядка; в – скорость роста древесной растительности; $T=0,95$; $\rho_0^* = 1,227$

ности соответствует симметричный потенциал $b^* = 0$ (рис. 1):

$$F^*(\eta, a^*) = \frac{1}{4}\eta^4 + \frac{1}{2}a^*\eta^2 \quad (7)$$

Экстремумам симметричного потенциала соответствует $b^* = -H^* + 3T\rho_0^* - 2T^3\rho_0^{*3} = 0$.

В результате получаем уравнение $\eta(\eta^2 + a^*) = 0$, из которого следует

$$\eta = \pm\sqrt{-a^*} = \sqrt{3(T^2\rho_0^{*2} - 1)}$$

Так как $\eta = \rho^* - T\rho_0^*$, $a^* = -3(T^2\rho_0^{*2} - 1)$, то полу-

чаем две ветви линии равновесия для лесной растительности:

$$\rho^* = T(\rho_0^* \pm \sqrt{3(\rho_0^{*2} - 1)}),$$

$$T = (\rho_0 - \rho_m) : \rho_0, \quad (8)$$

где T – безразмерная характеристика интенсивности развития травянистого яруса;

$\rho_0 = (\rho_s + \rho_b) : 2$ – средняя суммарная масса сосны и берёзы;

ρ_m – масса трав;

ρ – характеристика, описывающая интенсивность роста древесной растительности: плотность (масса) сосны и берёзы.

Здесь плюс соответствует древесному виду с большей плотностью.

Чем меньше масса трав, тем быстрее растёт плотность (масса) древесной растительности. Со временем на вырубках среднее значение плотности берёза – сосна растёт:

(рис. 2а). В критической точке плотности сосны и берёзы становятся равными – имеем случай смешанного древостоя, когда нельзя выделить преобладающий вид. Далее плотность более конкурентоспособного древесного вида (сосны или берёзы) растёт интенсивно. С увеличением T (уменьшением массы травяного покрова) бифуркационная кривая лежит выше, травянистый ярус существенно меняет динамику сосны и берёзы (рис. 2б).

Устойчивость состояний. Локаль-

ная, или глобальная устойчивость текущего состояния системы определяется видом потенциальной функции F^* . На рисунках 3а и 4а представлены частные случаи исследования устойчивости текущих состояний. Для локально устойчивых состояний один из минимумов выражен слабо. Это соответствует метастабильному состоянию.

Другие свойства модели

Росток катастрофы формирующейся лесной растительности. Возмущение. В потенциале F^* величина η^4 является ростком катастрофы, а

величина $\mathcal{E}g = b^*\eta + \frac{1}{2}a^*\eta^2$ – производным возмущением [8].

Вырожденные точки для экосистемы. Согласно теореме Тома, для катастрофы сборки вводятся следующие особые (в математическом отношении) точки:

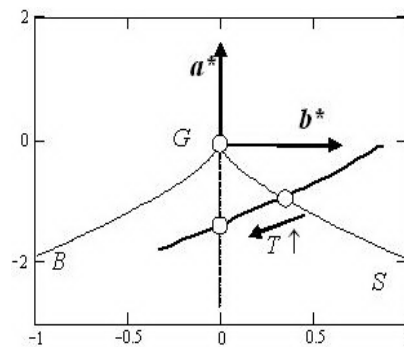


Рисунок 5. Сепаратриса BGS формирующейся на вырубке лесной растительности; управляющие параметры зависят от H^* – внешнего поля (мощности почв) – и параметра травянистого яруса T : $a^* = -3(T^2\rho_0^{*2} - 1)$;

$$b^* = -H^* + 3T\rho_0^* - 2T^3\rho_0^{*3}; \rho_0^* = 1,22;$$

$T = 0,85 \div 1,0$; $H^* = 0,08$. Двумя точками отмечена область метастабильных состояний

$$1. \frac{dF^*}{d\eta} = 0, \quad \eta^3 + a^*\eta + b^* = 0$$

вырожденные точки (соответствуют экстремуму потенциальной функции F);

$$2. \frac{d^2F^*}{d\eta^2} = 0, \quad 3\eta^2 + a^* = 0$$

дважды вырожденные точки, расположенные по линиям BG, SG (решения, соответствующие двум экстремумам потенциальной функции, становятся равными);

$$3. \frac{d^3F^*}{d\eta^3} = 0, \quad 6\eta = 0$$

трижды вырожденная точка G (решения, соответствующие трём экстремумам потенциальной функции, равны 0).

Из совместного решения 1 и 2 следует уравнение для сепаратрисы.

Энергетический потенциал. Энергетический потенциал для формирующейся на вырубке лесной растительности в общем случае несимметричен и имеет вид (рис. 1):

Деформация потенциала. Под деформацией потенциальной функции будем понимать последовательные

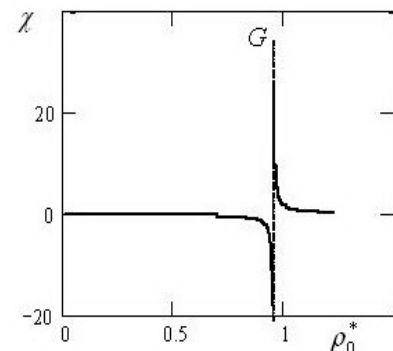


Рисунок 6. Восприимчивость роста параметра порядка от роста средней плотности древостоя до и после критической точки G; в критической точке имеет место сингулярность

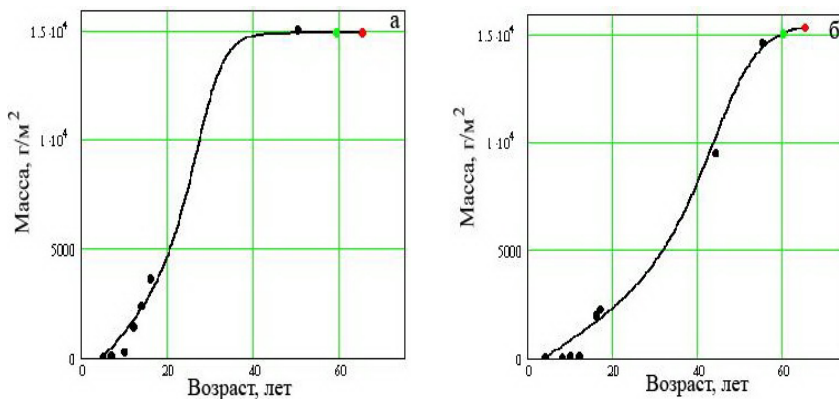


Рисунок 7. Восстановительно-возрастная динамика суммарной плотности сосны и берёзы; точки – экспериментальные данные; линия – результат решения уравнения (1): а – сосняки брусничниковые на крутых склонах южной экспозиции с мелкими каменистыми почвами ($H=10-15$ см) (две последние точки на линии – прогноз на 9 и 15 лет); коэффициенты уравнения: $k_1=2,22 \cdot 10^{-6}$, $k_2 T=2,06 \cdot 10^{-5}$, $k_3=1,44 \cdot 10^{-9}$, $k_4 H=222,22$; б – березняки разнотравно-вейниковые в нижних частях пологих склонов с мощными (H более 50 см) дренированными почвами (две последние точки на линии – прогноз на 5 и 10 лет); коэффициенты уравнения: $k_1=0,013$, $k_2 T=1,36 \cdot 10^{-5}$, $k_3=1,44 \cdot 10^{-10}$, $k_4 H=140$

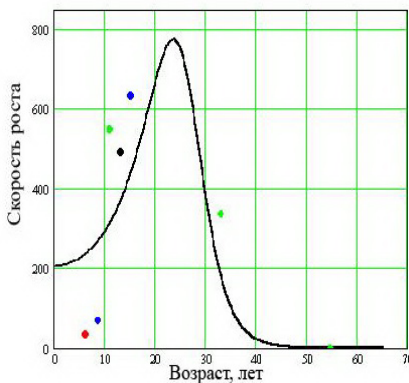


Рисунок 8. Динамика скорости роста суммарной плотности сосны и берёзы для сосняков брусничниковых на крутых склонах южной экспозиции с мелкими каменистыми почвами ($H=10-15$ см): точки построены по экспериментальным данным; линия – производная по времени от ρ

изменения вида потенциальной функции: переход рисунка 3 к рисунку 4 и наоборот. Эта деформация осуществляется за счёт внешнего поля, то есть за счёт изменения управляющего параметра H^* при $a^* < 0$.

Сепаратриса уравнения формирующейся на вырубке лесной растительности:

$$\left(\frac{a^*}{3}\right)^3 + \left(\frac{b^*}{2}\right)^2 = 0$$

является предельной для метастабильных состояний древесного и травянистого ярусов (рис. 5).

Восприимчивость. Восприимчивость для уравнения

$\eta^3 + a^* \eta + H_s^* = H^*$ характеризует изменение переменной η при изменении внешнего поля H^* :

При приближении к критической точке $a^* = b^* = \eta \rightarrow 0$ и восприимчивость стремится к бесконечности (рис. 6).

Особенности. Произвольное возмущение может изменить местонахождение и ориентацию сепаратрисы, однако оно не может изменить её вида. Другими словами, особенность в отображении проектирования устойчива относительно возмущений. Особенности присутствуют лишь в отображении проектирования на плоскость управляющих параметров.

Наследственное свойство. Возмущение в точке, где имеет место наследственное свойство (устойчивая точка), качественно на это свойство не влияет. Возмущения же в неустойчивой точке будут приводить к значительным изменениям.

2. Сравнение с экспериментальными данными

Нами проведён для южно-таёжного округа Зауральской холмисто-предгорной провинции специальный анализ восстановительно-возрастной динамики лесной растительности после сплошных рубок. Рассмотрены два крайних варианта дренированных экотопов: нижние части пологих склонов с мощными (более 50 см) дренированными почвами, обеспечивающими устойчивое увлажнение почвогрунтов, и крутые склоны южной экспозиции с мелкими каменистыми почвами и крайне неустойчивым водным режимом.

Для исследования временных зави-

симостей использован комбинированный метод, при котором подбор в пространстве участков, находящихся на разных стадиях восстановительно-возрастных смен, и построение из них временных рядов дополняется многолетними наблюдениями на постоянных пробных площадях.

Изучение древесной и травянистой растительности на пробных площадях выполнено по стандартным методикам [9]. Масса лесобразующих древесных видов определена расчётным путём. Масса стволов рассчитана по П.П. Изюмскому [10]. Масса кроны – на основе регрессионных уравнений, учитывающих физиологически обусловленные закономерности (пайп-модель) [11].

В результате получена временная динамика плотности (массы) сосны и берёзы для двух альтернативных экодинамических рядов с давностью рубки от 4-5 до 50-55 лет: березняков разнотравно-вейниковых (нижние части пологих склонов с мощными – H более 50 см – дренированными почвами) и сосняков брусничниковых (крутые склоны южной экспозиции с мелкими каменистыми почвами – $H=10-15$ см).

На основе полученных нами экспериментальных данных, решая обратную задачу, были определены все параметры уравнения (1) (рис 7). Обратная задача решалась в программе *MathCAD 2001* для двух контрастных экотопов методом последовательных приближений до достижения минимальности отклонения линии от экспериментальных точек по функционалу невязок. В результате получено два уравнения для восстановительно-возрастной динамики суммарной плотности сосны и берёзы (рис. 7а, б). Для сосняков брусничниковых на крутых склонах южной экспозиции с мелкими каменистыми почвами ($H=10-15$ см) уравнение имеет вид:

$$\frac{d\rho}{dt} = -0,00000222 \rho + 0,0000206 \rho^2 - 0,0000000014 \rho^3 + 222,22$$

Для березняков разнотравно-вейниковых в нижних частях пологих склонов с мощными (H более 50 см) дренированными почвами уравнение:

$$\frac{d\rho}{dt} = -0,013 \rho + 0,0000136 \rho^2 - 0,0000000008 \rho^3 + 140$$

На рассматриваемом временном интервале линии (результаты решения уравнений) достаточно хорошо соответствуют точкам (экспериментальным данным). Линия на рисунке 7б для березняков разнотравно-вейниковых (нижние части пологих склонов с мощными – H более 50 см – дренированными почвами) более пологая и проходит существенно ниже, чем на рисунке 7а для сосняков брусничниковых (крутые склоны южной экспозиции с мелкими каменистыми

Лесное хозяйство - Право

почвами – $H=10-15$ см), что свидетельствует об угнетении на мощных почвах древесной растительности в первые годы жизни развитым травянистым ярусом. Также определена скорость роста суммарной плотности (массы) сосны и берёзы (рис. 8).

Сравнение рисунков, полученных по экспериментальным данным (рис. 7а, 8), с теоретическими (рис. 3б, в) выявляет их хорошее соответствие. Теоретические положения подтверждаются экспериментальными данными.

Заключение

Таким образом, в процессе построения обобщённой модели формирования структуры древесного яруса на сплошных вырубках нами введены основные понятия и уравнения теории катастроф, приведена последо-

вательность анализа и построения математической модели. Совмещение теоретических положений, приводимых в данной статье, с экспериментальными данными позволяет построить количественную математическую модель, учитывающую региональные и экотопические особенности динамики лесной растительности, на основе которой возможны количественные прогнозы реальных ситуаций.

Первые проведённые нами расчёты показали, что найденные закономерности в первом приближении описывают формирование структуры древесного яруса на сплошных вырубках в южно-таёжном округе Зауральской холмисто-предгорной провинции.

Удовлетворительное соответствие теории и экспериментальных данных позволяет надеяться, что сравнение других характеристик (о которых говорилось в разделе 1) с экспериментальными данными будет проведено также успешно. Приведённая нами статистика не является полной. Мы надеемся представить в дальнейшем детальное обсуждение влияния управляющих параметров на структуру формирующихся лесов, методики определения критических точек и построения потенциальных функций.

Проведённая нами работа инициирует новый подход к изучению динамики лесной растительности, который обеспечит обоснованное прогнозирование состояния описываемых объектов.

Литература

1. Ведюшкин М. А. Моделирование пространственных переходов между фитоценозами // Математическое моделирование популяций растений и фитоценозов. М. : Наука, 1992. С. 24-30.
2. Thom R., Zeeman E. C. Catastrophe theory: its present state and future perspectives // Dynamical systems: Lecture notes in mathematics. 1975. Vol. 468. № 4. P. 366-389.
3. Володченко Л. А., Гуц А. К. Катастрофы типа «бабочка» в эволюции лесных экосистем // Математические структуры и моделирование. 2009. Вып. 19. С. 45-67.
4. Шиятов С. Г. Понятие о верхней границе леса // Растительный мир Урала и его антропогенные изменения. Свердловск : УНЦ АН СССР, 1985. С. 32-58.
5. Усольцев В. А. Фитомасса лесов Северной Евразии: предельная продуктивность и география. Екатеринбург : УрО РАН, 2003. 406 с.
6. Колесников Б. П., Зубарева Р. С., Смолоногов Е. П. Лесорастительные условия и типы лесов Свердловской области. Свердловск : УНЦ АН СССР, 1974. 176 с.
7. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М. : Мир, 1973. 511 с.
8. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. М. : Мир, 1984. Т. 1. 350 с. ; Т. 2. 285 с.
9. Программа и методика биогеоценотических исследований / отв. ред. Н. В. Дылис. М. : Наука, 1974. 402 с.
10. Изюмский П. П. Таксация тонкомерного леса. М. : Лесная пром-сть, 1972. 88 с.
11. Усольцев В. А. Биоэкологические аспекты таксации фитомассы деревьев. Екатеринбург : УрО РАН, 1997. 216 с.